MAT 307 TOPOLOJİYE GİRİŞ DERSİ FİNAL SINAV SORULARI VE CEVAP ANAHTARI

31.12.2018

SORU 1. (a) Ayrık uzayda verilen herhangi bir noktanın komşuluk tabanını ve komşuluk ailesini bulunuz.

(b) Ayrık olmayan uzayda verilen herhangi bir noktanın komşuluk tabanını ve komşuluk ailesini bulunuz.

CEVAP 1. (a) $(X, P(X))$ ayrık uzayında X in her alt kümesi açık olduğundan x-noktasının komşuluklar ailesi

$$N(x) = \{V \subset X : x \in V\}$$

dir. x-noktasının yerel(komşuluklar) tabanı

$$E(x) = \{\{x\}\}$$

ailesidir. Gerçekten $\forall N \in N(x)$ için $E \subset N$ olacak şekilde E -nin oluşturduğu kümeler ailesi $E(x)$ olduğuna göre $N = \{x\}$ alınması halinde $E \subset \{x\}$ olacak şekilde bir tek $E = \{x\}$ kümesi vardır. O halde $E(x) = \{x\}$ dir.

(b) Ayrık olmayan uzayda X in açık alt kümeleri X ve $\emptyset$ olup x-noktasının komşuluklar ailesi

$$N(x) = \{X\}$$

dir. x-noktasının komşuluk tabanı

$$E(x) = \{X\}$$

ailesidir. Gerçekten $\forall N \in N(x)$ için $E \subset N$ olacak şekilde E -nin oluşturduğu kümeler ailesi $E(x)$ olduğuna göre $N = X$ alınması halinde $E \subset X$ olacak şekilde bir tek $E = X$ kümesi vardır. O halde $E(x) = \{X\}$ dir.

SORU 2. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji

$$\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c, d\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}\big\}$$

olsun. $A = \{a, d, e\}$ kümesinin iç noktalarını bulunuz ? A kümesi uzayda yoğun mudur, gösteriniz ?

CEVAP 2. A kümesinin içini bulursak A kümesinin iç noktalarını bulmuş oluruz. O halde tanımdan;

$$A^o = \bigcup\{V \subset X : V \subset A, V \in \tau\} = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$$

bulunur ve A kümesinin iç noktası a-dır. A kümesinin uzayda yoğun olması için $\bar{A} = X$ olmalıdır. O halde X kümesinin τ topolojisine göre kapalılar ailesini bulalım:

$$\kappa = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}, \{c, d, e\}\}$$

$$\bar{A} = \bigcap \{K \subset X : A \subset K, K\ kapalı\} = X$$

olup A, X de yoğundur.

SORU 3. $X = \{a, b, c, d\}$ bir küme, $fl = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ ailesi verilmiş olsun. fl ailesini alt taban kabul eden X üzerindeki topolojiyi bulunuz.

CEVAP 3. fl nin elemanlarının birleşimi X i verdiğinden fl alt taban olabilir. O halde fl nin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu β ailesi;

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}, \quad \{b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}, \quad \{d\} \cap \{d\} = \{d\},$$
$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}, \quad \{a, b\} \cap \{d\} = \emptyset, \quad \{b, c\} \cap \{d\} = \emptyset,$$
$$\{a, b\} \cap \{b, c\} \cap \{d\} = \emptyset$$

olup ayrıca fl de kesişim işlemi tanımlı ve fl nin elemanlarının birleşimi X i verdiğinden

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X, A_i \in fl$$

olmasından

$$\beta = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{d\}\}$$

olarak bulunur. β-nın elemanlarının birleşimleri olarak yazılan kümelerin oluşturduğu τ ailesi

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}\}$$

dir. τ ailesi $(t1)$, $(t2)$ ve $(t3)$ özelliklerini sağladığından τ topolojisi fl ailesinin X üzerinde ürettiği topolojidir.

SORU 4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin kapanışı X uzayındaki değme noktaları kümesine eşittir, gösteriniz?

CEVAP 4. $x \notin \bar{A}$ ise, gösterelim ki x, A nın değme noktası değildir. $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A}^c$ dir. Ayrıca $\bar{A} \cap \bar{A}^c = \emptyset$ ve $A \subset \bar{A}$ olmasından $A \cap \bar{A}^c = \emptyset$ dir. $\bar{A}$ kapalı, $\bar{A}^c$ açık ve $x \in \bar{A}^c$ olmasından $\bar{A}^c \in N(x)$ dir. $A \cap \bar{A}^c = \emptyset$ olmasından x, A nın değme noktası değildir. O halde

$$\bar{A} \supset \{x \in X : x, A \text{ nın değme noktası}\}. \tag{1}$$

Tersine olarak x, A nın değme noktası değil ise, gösterelim ki $x \notin \bar{A}$ dır. x, A nın değme noktası değil ise $\exists U \in N(x)$ açık komşuluğu var $\ni U \cap A = \emptyset$ dir. $A \cap U = \emptyset \Rightarrow A \subset U^c, x \in U$

olduğundan $x \notin U^c$ dir. U^c, A yı kapsayan kapalı bir küme olduğundan $U^c \in \kappa_A$ dır. O halde $x \notin \bar{A}$ dır. Böylece

$$\{x \in X: x, A \text{ nın değme noktası}\} \supset \bar{A} \tag{2}$$

dır. O halde (1) ve (2) den

$$\bar{A} = \{x \in X: x, A \text{ nın değme noktası}\}$$

dır.

SORU 5 : Birinci sayılabilir ve ikinci sayılabilir uzayı tanımlayınız. İkinci sayılabilir her uzay birinci sayılabilir uzaydır, gösteriniz.

CEVAP 5 : Birinci sayılabilir uzay : (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\chi(X,\tau) \leq N_0$ ise (X,τ) topolojik uzayına denir. Diğer bir deyimle (X,τ) topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa uzaya birinci sayılabilir uzay denir.

İkinci sayılabilir uzay : (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\omega(X,\tau) \leq N_0$ ise (X,τ) uzayına denir. Diğer bir deyimle, (X,τ) topolojik uzayı sayılabilir bir tabana sahipse uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.

(X,τ) uzayı ikinci sayılabilir bir uzay olsun. Bu durumda $\omega(X,\tau) \leq N_0$ dır. Yani $\exists \beta$ tabanı var $\ni$ $|\beta| \leq N_0$ dır. $x \in X$ noktasının $E(x)$ komşuluklar tabanı, β nın bir alt ailesidir. O halde

$$E(x) \subset \beta \Rightarrow |E(x)| \leq |\beta| \leq N_0 \Longrightarrow |E(x)| \leq N_0$$

dır. Böylece (X,τ) uzayı birinci sayılabilir uzaydır.

SORU 6 : (X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. β ailesi τ topolojisi için bir tabandır ancak ve ancak her $x \in X$ için $E(x) = \{E \in \beta: x \in E\}$ ailesi x noktası için bir komşuluk tabanıdır, gösteriniz?

CEVAP 6 : β ailesi τ topolojisi için bir taban olsun. Gösterelim ki; $E(x), x$-in komşuluk tabanıdır. Herhangi bir $x \in X$ için $N \in N(x)$ ise, komşuluk tanımından $x \in U \subset N$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ vardır. U açık kümesi β ya ait kümelerin bir birleşimine eşittir. O halde $x \in E \subset U$ olacak şekilde en az bir $E \in \beta$ vardır. Bu da $E \in E(x)$ olması demektir. O halde $E(x)$, x-in komşuluklar tabanıdır.

Tersine olarak her $x \in X$ için $E(x)$-in komşuluklar tabanı olduğunu kabul edelim ve gösterelim ki β, τ için bir tabandır. $U \in \tau$ herhangi bir eleman olsun. Her $x \in U$ için $U \in N(x)$ dir. Komşuluklar tabanı tanımından $x \in V_x \subset U$ olacak şekilde $V_x \in E(x)$ var ve dolayısıyla $V_x \in \beta$ dır. Her $x \in U$ için $x \in V_x \subset U$ olduğundan $U = \bigcup_{x \in U} V_x, V_x \in \beta$ dır. O halde τ nun herhangi bir elemanı β ya ait elemanların birleşimi şeklinde yazıldığından β, τ için bir tabandır.